Analisi, Primo Esonero (15-11-2019), Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi. **A**

Nome: *Cognome:* *Matricola:*

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = +2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = −1. Esercizi 4–5: punti 0–6. (Totale= 36. Voto ≤ 17 = Non sufficiente $\mapsto$ Scritto primo appello.)

Esercizio 1 Per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a 0. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\frac{1}{n}(\cos(a_n)e^{-|a_n|}) \to 0$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $n^2 e^{a_n} \to +\infty$ per $n \to +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\{\frac{1}{1+6a_n^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 2 Sia $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione.

1. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ converge. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge, allora $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(a_k)$ è indeterminata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ converge. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 3 Per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona crescente si ha:

1. Esiste infinito $\lim_{x\to+\infty} \log(|f(x)|)$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Esiste finito $\lim_{x\to 7^-} (e^{f(x)} + f(e^x))$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Se f è continua e $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n, y_n \in \mathbb{R} :\ f(x_n) \leq -n,\ f(y_n) \geq n$, allora f è iniettiva e $Im(f) = \mathbb{R}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. Se f è continua, allora $\displaystyle\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1-\cos(4x)}{\sin(x^2)}\right) < f(9)$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 4 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita da $a_n := 3n^2 - 5n - (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{4})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

A) Determinare se esiste il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

B) Stabilire, motivando la risposta, se a_n è definitivamente monotona.

C) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{3\alpha} + 2\cos^2(n)}$ è convergente.

Esercizio 5 Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } x > 2; \\ x + c & \text{se } x \leq 2. \end{cases}$$

A) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è continua.

B) Determinare per quali $c \in \mathbb{R}$ la funzione f definita sopra è monotona.

C) Per $c = -3$ determinare $\sup\limits_{[1,8]} f(x)$ e $\inf\limits_{[1,8]} f(x)$ e stabilire se essi sono rispettivamente massimi e minimi.